

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD  
Concours d'admission sur classes préparatoires

---

**MATHEMATIQUES**

Option économique

**Année 2001**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

**L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**

**Exercice 1**

$E$  désigne un espace vectoriel réel sur  $\mathbb{R}$ , rapporté à sa base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ .

On désigne par  $a$  un réel non nul et on considère l'endomorphisme  $f_a$  de  $E$ , défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

1. (a) Ecrire la matrice  $A_a$  de  $f_a$  relativement à la base  $\mathcal{B}$  et calculer  $A_a^2$ .  
(b) Montrer que 0 est la seule valeur propre de  $A_a$ .  
(c)  $A_a$  est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
2. On pose  $u_1 = ae_1 + e_2 - ae_3$ .  
(a) Montrer que  $\mathcal{B}' = (u_1, e_2, e_3)$  est une base de  $E$

- (b) Vérifier que la matrice de  $f_a$  relativement à la base  $\mathcal{B}'$  est  $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dans la suite, on cherche à caractériser les endomorphismes  $g$  de  $E$  tels que  $g \circ g = f_a$ .

3. On suppose qu'un tel endomorphisme  $g$  existe et on note  $M$  sa matrice dans  $\mathcal{B}'$ .  
(a) Expliquer pourquoi  $M^2 = K$  puis montrer que  $MK = KM$ .

(b) Dédurre de ces deux relations que  $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $x$ ,  $y$  et  $z$  étant 3 réels tels que  $xz = 1$ .

4. Réciproquement, vérifier que tout endomorphisme  $g$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}'$  est du type ci-dessus est solution de  $g \circ g = f_a$ .

## Exercice 2

On désigne par  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents  $R_1, R_2$  et  $R_3$  de probabilités respectives  $P_1, P_2$  et  $P_3$ . On a donc  $P_1 + P_2 + P_3 = 1$  et on admet que, pour tout  $i$  de  $\{1, 2, 3\}$ ,  $0 < P_i < 1$ .

On effectue  $n$  épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.

Pour tout  $i$  de  $\{1, 2, 3\}$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro  $i$  n'est pas obtenu à l'issue des  $n$  épreuves et 0 sinon.

On désigne par  $X$  la variable égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des  $n$  épreuves.

1. (a) Justifier soigneusement que  $X = X_1 + X_2 + X_3$ .
- (b) Donner la loi de  $X_i$ , pour tout  $i$  de  $\{1, 2, 3\}$ .
- (c) En déduire l'espérance de  $X$ , notée  $E(X)$ .

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels  $P_i$  en lesquelles  $E(X)$  admet un minimum local. Pour ce faire, on note  $f$  la fonction définie sur l'ouvert  $]0, 1[ \times ]0, 1[$  de  $\mathbb{R}^2$  par :  $f(x, y) = (1 - x)^n + (1 - y)^n + (x + y)^n$ .

2. (a) On pose  $P_1 = x$  et  $P_2 = y$ . Vérifier que  $E(X) = f(x, y)$ .
- (b) Montrer que  $f$  est une fonction de classe  $C^2$  sur  $]0, 1[ \times ]0, 1[$ .
- (c) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$ .
- (d) En déduire que le seul point en lesquelles les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$  s'annulent simultanément est le point  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .
- (e) Démontrer que  $f$  présente un minimum local en ce point.
- (f) Donner la valeur de  $E(X)$  correspondant à ce minimum.

## Exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité.  
La durée de vie d'un certain composant électronique est une variable aléatoire  $X$  dont une densité est  $f$ .
2. (a) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .
- (b) Calculer la médiane de  $X$  c'est-à-dire le réel  $\mu$  tel que  $p(X \leq \mu) = \frac{1}{2}$ .
3. On appelle mode de la variable  $X$  tout réel  $x$  en lequel  $f$  atteint son maximum. Montrer que  $X$  a un seul mode, noté  $M_o$ , et le déterminer.
4. (a) En utilisant un résultat connu concernant la loi normale, établir que  $X$  a une espérance et montrer que 
$$E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$
- (b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la variance de  $X$ .

# Problème

## Partie 1

On pose, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1,  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ .
2. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n \leq \ln(n) + 1$ .

## Partie 2

On considère une suite  $(u_n)$  définie par son premier terme  $u_0 = 1$  et par la relation suivante, valable pour tout entier  $n$  :  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ .

1. (a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.  
(b) En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
2. (a) Pour tout entier  $k$ , exprimer  $u_{k+1}^2 - u_k^2$  en fonction de  $u_k^2$ .  
(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ .  
(c) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n^2 \geq 2n + 1$ . En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
3. (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :  
$$u_n \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1}.$$
  
(b) En utilisant la partie 1., établir que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :  
$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$
  
(c) En déduire finalement que  $u_n \sim \sqrt{2n}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

## Partie 3

1. Ecrire un programme en Turbo Pascal permettant de calculer et d'afficher  $u_n$  lorsque l'utilisateur entre la valeur de  $n$  au clavier.
2. (a) Ecrire un deuxième programme, toujours en Turbo Pascal, qui permette de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel  $n$  pour lequel  $u_n \geq 100$ .  
(b) On donne  $\ln 2 < 0,70$  et  $\ln 5 < 1,61$ . En déduire un majorant de  $\ln 5000$ .  
(c) Montrer que l'entier  $n$  trouvé en 2a) est compris entre 4995 et 5000.