

# MATHEMATIQUES E.M.LYON Voie Eco 2004

## PREMIER EXERCICE

On considère l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par :

$$f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}$$

1. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  comprenant les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

2. a) Établir, pour tout  $t \in [0, +\infty[$  :  $2e^t - t - t^2 > 0$  et  $1+t \geq \sqrt{1+t^2}$

b) En déduire:

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad f(t) > t$$

3. On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Établir que  $u_n$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

b) Écrire un programme en Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n > 10^6$

4. On considère l'application  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$G(x) = \int_{-x}^{+x} f(t) dt$$

a) Montrer que  $G$  est impaire.

b) Montrer que  $G$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $G'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

c) Quelle est la limite de  $G(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ?

d) Étudier le sens de variation de  $G$  et dresser le tableau de variation de  $G$  sur  $\mathbb{R}$  comprenant les limites de  $G$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

## DEUXIÈME EXERCICE

On note  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels,  $I$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $0$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

On considère, pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , les ensembles  $E_1(A)$  et  $E_2(A)$  suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); AM = M\} \\ E_2(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); A^2M = AM\} \end{aligned}$$

### Partie I

1. Montrer que  $E_1(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On admettra que  $E_2(A)$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2. a) Établir :  $E_1(A) \subset E_2(A)$

b) Montrer que, si  $A$  est inversible, alors  $E_1(A) = E_2(A)$

---

3. a) Établir que, si  $A - I$  est inversible, alors  $E_1(A) = \{0\}$

b) Un exemple : Soit  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $E_1(B)$  et  $E_2(B)$

### Partie II

On considère la matrice  $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $C$ .
2. En déduire une matrice diagonale  $D$ , dont les termes diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible  $P$ , dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, telles que  $C = P D P^{-1}$ .
3. Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On note  $N = P^{-1}M$ .  
Montrer :  $M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D)$ .
4. Montrer que  $N \in E_1(D)$  si et seulement s'il existe trois réels  $a, b, c$  tels que  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
5. En déduire l'expression générale des matrices de  $E_1(C)$  et déterminer une base et la dimension de  $E_1(C)$ .
6. Donner l'expression générale des matrices de  $E_2(C)$  et déterminer une base et la dimension de  $E_2(C)$ .  
Est-ce que  $E_1(C) = E_2(C)$  ?

## TROISIÈME EXERCICE

Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes.

- La proportion de boules blanches est  $b$ .
- La proportion de boules rouges est  $r$ .
- La proportion de boules vertes est  $v$ .

Ainsi, on a :  $0 < b < 1$ ,  $0 < r < 1$ ,  $0 < v < 1$  avec  $b + r + v = 1$ .

On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.

Pour tout entier naturel  $i$  supérieur ou égal à 1, on note  $B_i$  (respectivement  $R_i$  ;  $V_i$ ) l'événement " la  $i$ -ème boule tirée est blanche (respectivement, rouge ; verte) "

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Par exemple, lorsque le résultat des tirages est  $V_1, V_2, B_3$ , la variable aléatoire  $X$  prend la valeur 3.

### Partie I

1. Préciser les valeurs possibles de  $X$ .
2. Montrer :  $\forall k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ ,  $P(X = k) = (1 - b)b^{k-1} + (1 - r)r^{k-1} + (1 - v)v^{k-1}$
3. Montrer que la variable aléatoire  $X$  admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2$$

## Partie II

On considère la fonction  $f$  de classe  $C^2$  sur  $]0, 1[ \times ]0, 1[$  définie par :

$$\forall (x, y) \in ]0, 1[ \times ]0, 1[, f(x, y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$$

1. Calculer, pour tout  $(x, y) \in ]0, 1[ \times ]0, 1[$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .
2. Montrer qu'il existe un unique point  $I$  de  $]0, 1[ \times ]0, 1[$  en lequel  $f$  est susceptible de posséder un extremum local et déterminer  $I$ .
3. Montrer que  $f$  admet en  $I$  un minimum local.
4. a) Exprimer  $E(X)$  en fonction de  $f(b, r)$ .  
b) Que peut-on dire de  $E(X)$  lorsque  $b = r = v = \frac{1}{3}$  ?

## Partie III

1. Montrer que l'intégrale  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$  est convergente et déterminer sa valeur.

On rappelle que  $3^t = e^{t \ln(3)}$ .

On note  $\alpha = \int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$  et on considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t \in ]-\infty; 2[ \\ g(t) = \frac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t \in [2; +\infty[ \end{cases}$$

2. Vérifier que  $g$  est une densité de probabilité.  
On note  $Y$  une variable aléatoire admettant  $g$  comme densité.
3. Montrer que  $Y$  admet une espérance et calculer cette espérance.
4. On note  $Z$  la variable aléatoire égale à la partie entière de  $Y$ . On rappelle que la partie entière d'un nombre réel  $x$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ .
  - a) Déterminer la loi de probabilité de  $Z$ .
  - b) Comparer la loi de probabilité de  $X$  lorsque  $b = r = v = \frac{1}{3}$  et la loi de probabilité de  $Z$ .

-FIN -